Vango

1. Gleichungen und Funktionen

1.1. Lineare Gleichungen

1.1.1 Einführung in das Thema Gleichungen

Eine Gleichung ist eine Gleichheitsrelation zwischen zwei äquivalenten Termen.
Eine Gleichung wäre also z.B. '45 = 45'.

In vielen Gleichungen kommen Variablen vor. Eine Variable steht zunächst für eine beliebige Zahl, die üblicherweise mit x gekennzeichnet wird.

Eine Gleichung heißt allgemeingültig, wenn sie mit jeder Belegung für die Zahl x erfüllt wird. Eine Gleichung heißt erfüllbar, wenn es Belegungen, die sie erfüllen, und Belegungen, die sie nicht erfüllen gibt. Eine Gleichung heißt unerfüllbar, wenn es keine Belegung für x gibt, mit der die Gleichung erfüllt ist.

Beispiel :
Die Gleichung 42 = 42 ist allgemeingültig, da sie bei jeder Belegung erfüllt ist.
Die Gleichung x^0 = 1; x ≠ 0 ist auch allgemeingültig, da x^0 immer gleich 1 ist (bis auf den Fall x = 0).
Die Gleichung 2x = 8 ist erfüllbar, da es eine Belegung gibt, die die Gleichung erfüllt (x=4) und eine Belegung, die die Gleichung nicht erfüllt (x=9).
Die Gleichung 0x = 5 ist unerfüllbar, da 0*x immer gleich 0 ist.

1.1.2 Lösung von Gleichungen

Die Lösung einer Gleichung umfasst alle Werte für x, bei denen die Gleichung erfüllt ist. Diese Werte kann man durch äquivalentes Umformen berechnen, solange die Gleichung erfüllbar ist. Ist die Gleichung nicht erfüllbar, ist die Lösung die leere Menge L:={∅}. Ist die Gleichung allgemeingültig, ist die Lösung die Menge aller Zahlen, die diese Gleichung belegen. Trifft es also ohne Ausnahme für jede Zahl zu, ist die Lösung die Menge aller reellen Zahlen : L:={$\mathbb{R}$}.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfasst alle Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl von -∞ bis ∞ liegen. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ umfasst alle Zahlen, die als Bruch von zwei rationalen Zahlen darstellbar sind. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfasst alle Zahlen, die durch 1 teilbar sind. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ umfasst alle ganze Zahlen, die größer als 0 sind. Möchte man die 0 dennoch mitzählen, schreibt man $\mathbb{N}_0$.
Braucht man eine dieser unendlichen Mengen, aber möchte bestimmte Zahlen ausschließen, nimmt schreibt man es mit dem \ auf.

Beispiel : Die reellen Zahlen ohne 42 als Lösung wären L:={$\mathbb{R}$ \ {42}}.

Nun kommen wir zum Auflösen von Gleichungen :

Beispiel :

Unsere Gleichung ist 4x + 3 = 11

Nun lösen wir die Gleichung durch äquivalentes Umformen. Beachte : Die Rechen-operationen müssen stets auf beiden Seiten folgen.

4x + 3 = 11 | -3
4x = 8 | :4
x = 2

Das Ziel ist sozusagen immer herauszufinden, welchen Wert x hat.

Nun würde man schreiben : L:= {2}.

Beispiel :

Unsere Gleichung ist 0*x = 2

0x = 2 | :0

Da man nicht durch 0 teilen darf, und 0*x immer 0 ist, kann die Gleichung nie erfüllt werden. Es gibt keinen Wert für x.

Nun würde man schreiben : L:= [∅}

1.2. Lineare Gleichungssysteme

1.2.1 Was Gleichungssysteme sind

Bisher haben wir uns ausschließlich mit Gleichungen beschäftigt, die maximal eine Variable enthalten. In diesem Kapitel werden wir uns mit Gleichungen beschäftigen, die mehrere Variablen enthalten. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, brauchen wir allerdings nicht nur eine Gleichung, sondern mehrere Gleichungen, die jeweils gleiche Variablen enthalten. Diese Struktur von Gleichungen heißt Gleichungssystem.

Für Gleichungssysteme gilt folgender Merksatz :
Ein Gleichungssystem kann genau dann eindeutig lösbar sein, wenn es mindestens so viele Gleichungen wie Variablen gibt.

Gibt es mehr Gleichungen als Variablen, werden zur Lösung nicht alle Gleichungen gebraucht.

Beispiel für ein Gleichungssystem mit 2 Variablen :

[1] : 3x + 2y = 12 [2] : 3y = 9

In diesem Fall ist offensichtlich, dass x = 2 und y = 3, da y durch Lösen der Gleichung [2] direkt bestimmt werden kann und anschließend in Gleichung [1] eingesetzt werden kann.

Es gibt aber auch Gleichungssysteme, wo dies nicht so einfach möglich ist.

Beispiel :

[1] : 5x - 3y = 14 [2] : 3x + 4y = 20

Um solche Gleichungssysteme zu lösen, gibt es einige Verfahren, die Sie im nächsten Kapitel kennenlernen.

1.2.2 Lösung von Gleichungssystemen

1.2.2.1. Das Gleichsetzungsverfahren

Das Gleichsetzungsverfahren baut darauf auf, dass 2 Terme, die den gleichen Wert ergeben, äquivalent sind.

Beispiel : $x = 4y + 5$
$x = 6y - 3$

=> $4y + 5 = 6y - 3$

Dieses einfache Gesetz lässt sich auf das Lösen von Gleichungssystemen anwenden :

Sei folgendes Gleichungssystem gegeben :

[1] : $7x - 4y = 1$ [2] : $2x + 5y = 31$

Nun müssen erst beide Terme nach x oder nach y aufgelöst werden, um anschließend das Gleichsetzungsverfahren anwenden zu können. In unserem Beispiel werden die Terme nach y aufgelöst :

[1]

$$\begin{aligned} 7x - 4y &= 1 \mid + 4y \\ 7x &= 1 + 4y \mid : 7 \\ x &= \tfrac{1}{7} + \tfrac{4}{7}y \end{aligned}$$

[2] :

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 31 \mid - 5y \\ 2x &= 31 - 5y \mid : 2 \\ x &= \tfrac{31}{2} - \tfrac{5}{2}y \end{aligned}$$

Nun werden die äquivalenten Terme gleichgesetzt und anschließend nach y aufgelöst :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{7} + \tfrac{4}{7}y &= \tfrac{31}{2} - \tfrac{5}{2}y \mid - \tfrac{1}{7} + \tfrac{5}{2}y \\ \tfrac{43}{14}y &= \tfrac{215}{14} \mid : \tfrac{43}{14} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Jetzt wird der Wert für y in eine der beiden Gleichungen eingesetzt (hier im Beispiel nehmen wir die erste). Die Gleichung kann nun nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 7x - 4*5 &= 1 \\ 7x - 20 &= 1 \mid +20 \\ 7x &= 21 \mid : 7 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Nun ist das Gleichungssystem gelöst.
$x = 3 \quad y = 5$

1.2.2.2. Das Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren geht ähnlich wie das Gleichsetzungsverfahren, ist jedoch etwas schneller. Zunächst muss eine der Gleichungen nach einer Variable aufgelöst werden. Danach wird der äquivalente Term in die zweite Gleichung für die Variable eingesetzt. Durch Auflösen dieser Gleichung bestimmt man den Wert der ersten Variable, den der zweiten wieder durch Einsetzen des Werts in eine der beiden Gleichungen.
Dies erspart ein paar Schritte, da nur einer der beiden Terme umgeformt werden muss.

Vango

Beispiel :

Sei folgendes Gleichungssystem gegeben :

[1] : $3x + 2y = 14$ [2] : $5x + 3y = 22$

Zuerst wird Gleichung [1] nach x aufgelöst :

$3x + 2y = 14$ | $- 2y$
$3x = 14 - 2y$ | $: 3$
$x = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}y$

Dann wird der Term in Gleichung [2] für x eingesetzt :

$5*(\frac{14}{3} - \frac{2}{3}y) + 3y = 22$
$\frac{70}{3} - \frac{1}{3}y = 22$ | $- \frac{70}{3}$
$-\frac{1}{3}y = -\frac{4}{3}$ | $*(-3)$
$y = 4$

Jetzt wird y=4 für y in eine der Gleichungen eingesetzt (hier Gleichung [1]) :

$3x + 2*4 = 14$
$3x + 8 = 14$ | -8
$3x = 6$ | $: 3$
$x = 2$

Damit ist das Gleichungssystem gelöst :
$x = 2$ und $y = 4$

1.2.2.3. Das Additionsverfahren

Das Additionsverfahren hat gegenüber des Einsetzungsverfahrens zwei Vorteile. Zum einen spart man wieder einen Rechenschritt ein. Zum anderen muss bei natürlichen Werten für die Variablen nicht mit Brüchen gerechnet werden.
Das Additionsverfahren baut auf der Erkenntnis auf, dass man zu jeder gültigen Gleichung eine weitere gültige Gleichung addieren kann, ohne den Wahrheitswert der Gleichung zu verändern.

Einfaches Beispiel :
[1] : $2 + 4 = 6$ [2] : $3 + 7 = 10$
[1] + [2] : $2 + 4 + 3 + 7 = 10 + 6$

Wie man sieht, ist auch die Summe der beiden Gleichungen wieder eine gültige Gleichung.

Damit man auf diese Weise bei einem Gleichungssystem eine Variable loswird, muss in einer Gleichung der positive Wert, in der anderen Gleichung der negative Wert der Variable stehen, so dass bei der Addition die Variable wegfällt. Der Multiplikand vor der Variable muss dafür natürlich gleich sein.

Diese Eigenschaft ist aber nicht in jedem Gleichungssystem gegeben. Darum muss eine der Gleichungen auf beiden Seiten mit einem Faktor multipliziert werden, so dass die Eigenschaft gegeben ist.

Beispiel :

Sei folgendes Gleichungssystem gegeben :

[1] : $3x + 4y = 11$ [2] : $9x + 2y = 13$

Zunächst muss die eine Gleichung in die entsprechende Form gebracht werden.
In diesem Beispiel wird Gleichung [2] mit -2 multipliziert, um -4y zu erreichen. Die neue Gleichung bezeichnen wir als [2'].

[2] : $9x + 2y = 13 \mid * (-2)$
[2']: $-18x - 4y = -26$

Nun wird Gleichung [2'] zu der Gleichung [1] addiert :

$3x + 4y = 11 \mid + [2']$
$3x - 18x + 4y - 4y = 11 - 26$
$-15x = -15 \mid : (-15)$
$x = 1$

Jetzt wird x = 1 in eine der Gleichungen [1] und [2] eingesetzt (in dem Beispiel in [1]) :

$3*(1) + 4y = 11$
$3 + 4y = 11 \mid -3$
$4y = 8 \mid : 4$
$y = 2$

Damit ist das Gleichungssystem mit x=1 und y=2 gelöst.

1.2.2.4. Das Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren (entwickelt von dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß, 1777-1855) ist eine Erweiterung bzw. eine andere Auslegung des Additionsverfahrens, die erleichtert, Gleichungssysteme mit beliebig vielen Variablen zu lösen. Da es bei zwei Variablen fast genauso wie das Additionsverfahren funktioniert, schauen wir uns ein Beispiel mit 3 Variablen an :

Sei folgendes Gleichungssystem gegeben :

[1] : $2x - 3y + 2z = 6$
[2] : $7x + 2y - 4z = 5$
[3] : $-12x + 3y + 6z = 12$

Das Ziel ist es, über Multiplikationen und Additionen die Gleichungen so umzuformen, dass in einer Gleichung am Ende keine, in einer anderen eine, und in der dritten Gleichung 2 Variablen wegfallen, der Faktor also gleich 0 ist. Zur besseren Übersicht, werden die Faktoren vor den Variablen, geordnet in eine Matrix eingetragen :

2	-3	2	6
7	2	-4	5
-12	3	6	12

$\cdot (-3{,}5)$ $\cdot (6)$

Um x in den unteren beiden Zeilen zu eliminieren, wird das Additionsverfahren zwischen [1] und [3], sowie [1] und [2] angewandt. Gleichung [1] wird entsprechend multipliziert –

anschließend wird die jeweils neue Gleichung zu Gleichung [2] bzw. [3] addiert. Man erhält folgende Matrix :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 12{,}5 & -11 & -16 \\ 0 & -15 & 18 & 48 \end{array}\right]$$

Jetzt muss in der unteren Zeile y eliminiert werden. Dies geschieht wieder mit dem Additionsverfahren, diesmal von Gleichung 2 auf 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 12{,}5 & -11 & -16 \\ 0 & -15 & 18 & 48 \end{array}\right] \cdot 1{,}2 \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 12{,}5 & -11 & -16 \\ 0 & 0 & 4{,}8 & 28{,}8 \end{array}\right]$$

Nun ist die Matrix in der gewünschten Form. Jetzt lassen sich die Lösungen schnell berechnen :

4,8z = 28,8 | : 4,8
z = 6

12,5y - 11z = -16
12,5y - 11*(6) = -16
12,5y - 66 = -16 | + 66
12,5y = 50 | : 12,5
y = 4

2x - 3y + 2z = 6
2x - 3*(4) + 2*(6) = 6
2x = 6 | : 2
x = 3

Damit ist dann das Gleichungssystem gelöst : x = 3, y = 4, z = 6

Ein Alternativer Lösungsweg sieht vor, die Matrix weiter umzuformen, so dass man folgende Form erhält :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 12{,}5 & -11 & -16 \\ 0 & 0 & 4{,}8 & 28{,}8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ | : 4{,}8 \end{array} \quad \ldots \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Dazu löst man zunächst die untere Zeile nach z auf, so dass man die Form

[0   0   1 | 6]

erhält. Dann addiert man ein Vielfaches dieser Zeile so auf die anderen Zeilen, dass die gewünschten Nullen entstehen. Die Einsen bekommt man durch Divisionsschritte hin.