Bearbeitungszeit : 45 Minuten 24.05.2014

Vangotest Nr. 15

Thema : vollständige Induktion, Gleichungssysteme

<u>Aufgabe 1</u> (lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten) : 20

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem :

[1] : 4x + 2y = 32 [2] : 3x - 4y = -20

a) Tragen Sie das Gleichungssystem in die vorgegebene 2x3-Matrix ein. [3 Punkte]

$$\left(\begin{array}{cc|c} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{array}\right)$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren. Nehmen Sie die Matrix dafür als Grundlage. [17 Punkte]

x = ___ y = ___

<u>Aufgabe 2</u> (lineres Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_5$) : 30

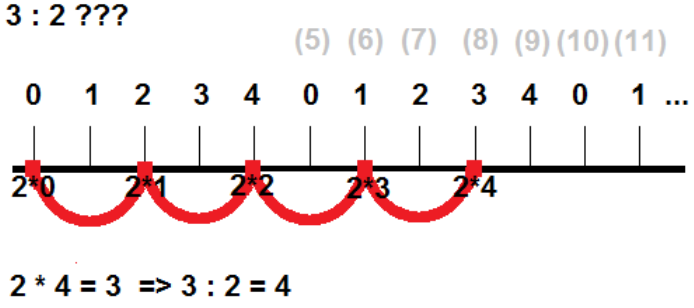
Mit $\mathbb{Z}_5$ bezeiche man den Körper $\mathbb{Z}_5$:={0, 1, 2, 3, 4}, wobei die Elemente jeweils die Reste bei der Division durch 5 sind.

Ein kleines Beispiel : 14 in $\mathbb{Z}_5$ = 4, da 14 : 5 = 2 Rest 4.

Dies gilt auch für Brüche. Beispiel :

$\frac{13}{7} = \frac{3}{2}$, da 13 : 5 = 2 Rest 3 und 7 : 5 = 0 Rest 2.

Aber wie löst man diesen Bruch in $\mathbb{Z}_5$ nun auf? Man startet mit dem Divisor. Das Ergebnis ist, wie oft man den Divisor zu 0 dazu addieren muss, um auf den Dividenten zu kommen. Bei unserem Beispiel (3 : 2) also 4, da 2 + 2 + 2 + 2 = 2*4 = 8, also 3 in $\mathbb{Z}_5$.



2 * 4 = 3 => 3 : 2 = 4

Es ist egal, wann man die Zahlen in $\mathbb{Z}_5$ umformt. Man kann es sofort machen, mitten drin, oder erst wenn man die Ergebnisse raus hat. Wenn man irgendwo eine durch 5 teilbare Zahl stehen hat, bietet es sich an, sie durch 0 zu ersetzen. Damit spart man sich meistens Rechenschritte.

Nun zur Aufgabe :

a) *Lösen Sie dieses Gleichungssystem in* $\mathbb{Z}_5$ *.* [15 Punkte]

[1] : 2x + y = 4 [2] 5x + 2y = 4

x = ___ y = ___

b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_5$ *.* [15 Punkte]

[1] : 8x + 4y = 23 [2] : 2x + 2y = 15

x = ___ y = ___

<u>Aufgabe 3</u> (vollständige Induktion) :

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass ... ___ 50

a) [10 Punkte]

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

b) [20 Punkte]

$$\sum_{k=1}^{n} 4k - 1 = 2n^2 + n$$

c) [20 Punkte]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Aufgabe 4</u> (Zusatzaufgabe) : [+20 Punkte] ___ 20

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Formel in c) auch im Allgemeinen gilt, wenn $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(an-(a-1)) \cdot (an+1)} = \frac{n}{an+1}$$