Vango

Übungsblatt 1

Seminar 18 A : Gruppenthorie

<u>Aufgabe 1</u>: Gruppe mit 3 Elementen (2 + 8 + 5 + 3 + 4 = 22 Punkte)

a) Definieren Sie eine Gruppe.

b) Sei $G = \{a, b, c\}$ eine Menge. Definieren Sie eine Verknüpfung $*$, sodass $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Tipp: Es gibt nur eine Möglichkeit die Elemente so zu kombinieren. Da Buchstaben nur Platzhalter für Zahlen sind, ist es natürlich immer noch dieselbe Möglichkeit, wenn man die Buchstaben nur vertauscht (z.B. alle a´s heißen jetzt b und umgekehrt).

Tipp: Ordnen Sie jedem Paar von Elementen einzeln ein Bild zu und definieren Sie so punktweise die Verknüpfung.

c) Zeigen Sie, dass $(G, *) \cong (\mathbb{Z}_3, +)$

d) Eine Gruppe heißt abelsch, wenn das Kommutativgesetz gilt:

$$a * b = b * a \qquad \forall\, a, b \in G$$

Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

e) Berechnen Sie in G folgende Aufgaben:

1.) $a * b * c$
2.) $b * a * a * c * b * b * c * c * a * a$
3.) $c * a * a * b * c * a * a$
4.) $a * b * c * b * c$

<u>Aufgabe 2</u>: Gruppenhomomorphismen (4 · 2 = 8 Punkte)

Welche dieser Abbildungen sind Homomorphismen, Momomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Endomorphismen, Automorphismen?

$f_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \qquad x \mapsto x$ (gerundet auf die nächste ganze Zahl)
$f_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}, +) \qquad x \mapsto i \cdot x$
$f_3 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \qquad x \mapsto -x$
$f_4 : (\mathbb{R}^{+}, +) \to (\mathbb{R}^{+}, \cdot) \qquad x \mapsto a^x$

<u>Aufgabe 3</u>: injektiv, surjektiv, bijektiv ($4 \cdot 2 = 8$ Punkte)

Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x$
$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2$
$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^3$
$f_8 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \qquad x \mapsto x^3$

<u>Aufgabe 4</u>: Gruppen ($2 \cdot 2 = 4$ Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Strukturen eine Gruppe sind:

a) $(\mathbb{Z}, +)$

b) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$